

א. m מציין את היחס $\frac{\overrightarrow{CK}}{\overrightarrow{CC'}}$, מכיוון שוקטור $\overrightarrow{CK}$ מוכל בתוך וקטור $\overrightarrow{CC'}$ אז כמובן שנצפה $0 < m < 1$. לפי הנתונים קל לראות שמתקיימים הקשרים הבאים:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{CK} = m\underline{w}$$

נתון שהמקצוע AA' מאונך למישור AEL ולכן יוצר זווית ישר עם כל וקטור במישור זה. נעזר בקשרים הבאים:

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{EK} = 0 \quad (2)$$

את וקטור $\overrightarrow{AL}$ ניתן למצוא בעזרת כלל המשולש:

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'} = \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

את וקטור $\overrightarrow{EK}$ נרשום באמצעות m ונמצא אותו ע"י כלל המשולש:

$$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CC'} = \underline{v} + m\underline{w} - \frac{1}{4}\underline{w}$$

ולכן מתקיים (נתון $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$):

$$\underline{w} \cdot (\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}) = 0 \quad (3)$$

$$\underline{w} \cdot (\underline{v} + \underline{w}(m - \frac{1}{4})) = 0 \quad (4)$$

מתוך משוואה (3) ניתן לראות ש $\underline{w} \cdot \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}^2 = 0$ ולכן $\underline{w} \cdot \underline{v} = -\frac{1}{2}\underline{w}^2$.

מתוך משוואה (4) ניתן לראות ש $\underline{w} \cdot \underline{v} + \underline{w}^2(m - \frac{1}{4}) = 0$

ע"י הצבה נקבל:

$$-\frac{1}{2}w^2 + w^2(m - \frac{1}{4}) = 0 \quad (5)$$

ולאחר חלוקה ב w^2 נקבל $\frac{1}{2} = m - \frac{1}{4}$ ולכן $m = \frac{3}{4}$.

ב. ראשית נמצא את משוואת המישור AEL ולאחר מכן נמצא את נקודה C', לפי סעיף א' אנו יודעים שמתקיים $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$ ולכן נקודה C רחוקה פי 3 מנקודה K מאשר נקודה C' (הישר הנתון מאונך למישור מכיוון שמקצוע CC' מאונך למישור).

ע"מ למצוא הצגה כללית של משוואת המישור אנו צריכים למצוא את וקטור הנורמל למישור ונקודה על המישור. נתון שוקטור $\overrightarrow{AA'}$ מאונך למישור AEL ולכן וקטור הכיוון של ישר CC' הוא וקטור הנורמל למישור AEL. משוואת מישור AEL היא:

$$x - y + 2z + D = 0 \quad (6)$$

ע"י הצבת הנקודה הנתונה $(2, -1, 3)$ במשוואה (7) נוכל למצוא את משוואת המישור:

$$2 - (-1) + 2 \cdot 3 + D = 0$$

קל לראות ש $D = -9$ ולכן משוואת המישור AEL היא:

$$x - y + 2z - 9 = 0 \quad (7)$$

נמצא את שיעורי נקודה C' ע"י משוואת הישר CC':

$$(x, y, 0) = (4, 5, 8) + t(1, -1, 2)$$

נקבל את המשוואות:

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - t \\ 0 = 8 + 2t \end{cases}$$

ע"י המשוואה השלישית נקבל $t = -4$ ולכן נקודה C' מקבלת את הערכים $(0, 9, 0)$.

מרחק של נקודה C' ממישור AEL:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + D|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 9 + 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3\sqrt{6} \quad (8)$$

ומכיוון שהמקצוע מאונך למישור אז מרחק של נקודה C מהמישור הוא פי 3 ממרחק של נקודה C' , ז"א $9\sqrt{6}$.